



University of the Pacific
Scholarly Commons

Euler Archive - All Works

Euler Archive

1781

De motu oscillatorio duorum corporum ex filo super trochleas traducto suspensorum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De motu oscillatorio duorum corporum ex filo super trochleas traducto suspensorum" (1781). *Euler Archive - All Works*. 516.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/516>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE MOTV OSCILLATORIO DVORVM CORPORVM EX FILO SVPER TROCHLEAS TRADVCTO SVSPENSORVM.

Auctore

L. EULERO.

§. 1.

Filo $AMNB$, super duas trochleas M et N traducto, Tab. III.
appensa sint duo corpora A et B . Per puncta M et N ducantur rectae verticales MP et NQ , ad easque horizontales AP et BQ , et elapso tempore t corpora teneant situm in figura repraesentatum. Tum pro situ corporum ponantur coordinatae $MP = x$ et $PA = y$, $NQ = x'$ et $QB = y'$, et quia longitudo fili manet inuariata, statuamus $MN = M$, $MA = a + z$ et $NB = b - z$, ut tota fili longitudo sit $= a + b + M$; tum vero ponamus angulos $AMP = \eta$ et $BNQ = \theta$ eritque

$x = (a + z) \cos. \eta$ et $y = (a + z) \sin. \eta$;
eodemque modo

$x' = (b - z) \cos. \theta$ et $y' = (b - z) \sin. \theta$.

§. 2. Ponatur nunc tensio fili $= T$, a qua quia
ambo corpora sursum trahuntur, dum propria gravitate
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. II. S deor-

deorsum nituntur, principia motus nobis suppeditant quatuor sequentes aequationes:

$$\begin{aligned} \text{I. } \frac{ddx}{z g d t^2} &= \frac{A - T \cos. \eta}{A}; & \text{III. } \frac{ddx''}{z g d t^2} &= \frac{B - T \sin. \theta}{B} \\ \text{II. } \frac{ddy}{z g d t^2} &= -\frac{T \sin. \eta}{A}; & \text{IV. } \frac{ddy'}{z g d t^2} &= -\frac{T \sin. \theta}{B}, \end{aligned}$$

ex quibus quatuor aequationibus 1^o. tensionem filii T: 2^o. quantitatem z; 3^o et 4^o angulos η et θ definiri oportet.

§. 3. At vero differentiendo habebimus

$$\begin{aligned} dx &= dz \cos. \eta - (a+z) d\eta \sin. \eta \text{ et } ddx = (ddz - (a+z) d\eta^2) \cos. \eta \\ &\quad - (2dz d\eta + (a+z) dd\eta) \sin. \eta \\ dy &= dz \sin. \eta + (a+z) d\eta \cos. \eta \text{ et } ddy = (ddz - (a+z) d\eta^2) \sin. \eta \\ &\quad + (2dz d\eta + (a+z) dd\eta) \cos. \eta \end{aligned}$$

Eodem modo reperietur

$$\begin{aligned} dx' &= -(ddz + (b-z) d\theta^2) \cos. \theta + (2dz d\theta - (b-z) dd\theta) \sin. \theta \\ ddy' &= -(ddz + (b-z) d\theta^2) \sin. \theta - (2dz d\theta - (b-z) dd\theta) \cos. \theta \end{aligned}$$

quibus valoribus substitutis, nostrae aequationes erunt:

$$\begin{aligned} \text{I. } \frac{(ddz - (a+z) d\eta^2) \cos. \eta - (2dz d\eta + (a+z) dd\eta) \sin. \eta}{z g d t^2} &= \frac{A - T \cos. \eta}{A} \\ \text{II. } \frac{(ddz - (a+z) d\eta^2) \sin. \eta + (2dz d\eta + (a+z) dd\eta) \cos. \eta}{z g d t^2} &= -\frac{T \sin. \eta}{A} \\ \text{III. } \frac{(ddz + (b-z) d\theta^2) \cos. \theta + (2dz d\theta - (b-z) dd\theta) \sin. \theta}{z g d t^2} &= \frac{B - T \cos. \theta}{B} \\ \text{IV. } \frac{(ddz + (b-z) d\theta^2) \sin. \theta - (2dz d\theta - (b-z) dd\theta) \cos. \theta}{z g d t^2} &= -\frac{T \sin. \theta}{B} \end{aligned}$$

§. 4. Hinc iam per idoneas combinationes formantur aequationes sequentes simpliciores:

I. $\cos. \eta + \text{II. } \sin. \eta$ dat:

$$\text{I. } \frac{ddz - (a+z) d\eta^2}{z g d t^2} = \frac{A \cos. \eta - T}{A}; \text{ porro}$$

— I. $\sin. \eta + \text{II. } \cos. \eta$ dat:

$$\text{II}^{\circ}. \frac{2dzd\eta + (a+z)d\eta^2}{2g d^2} = -\sin. \eta.$$

— III. $\cos. \theta$ — IV. $\sin. \theta$ praebebat:

$$\text{III}^{\circ}. \frac{ddz + (b-z)d\theta^2}{2g d^2} = \frac{T - B \cos. \theta}{B}.$$

+ III. $\sin. \theta$ — IV. $\cos. \theta$ producit:

$$\text{IV}^{\circ}. \frac{2dzd\theta - (b-z)d\theta^2}{2g d^2} = \sin. \theta.$$

Sicque tantum in I^a et III^a. tensio T occurrit, secunda autem et quarta tensionis sunt immunes.

§. 5. Ad tensionem igitur eliminandam utamur hac noua combinatione: I^a. A + III^a. B, quae praebebat

$$\frac{(A+B)ddz - A(a+z)d\eta^2 + B(b-z)d\theta^2}{2g d^2} = A \cos. \eta - B \cos. \theta$$

quae ergo aequatio cum superiorum secunda et quarta totam solutionem problematis continet, unde tam quantitatem z quam angulos η et θ definiri oportet.

§. 6. Antequam resolutionem harum aequationum aggrediamur, quatuor aequationes primum inuentas alio modo tractemus, et quia est

$dx = dz \cos. \eta - (a+z)d\eta \sin. \eta$ et $dy = dz \sin. \eta + (a+z)d\eta \cos. \eta$ utamur sequentibus combinationibus:

I. $2dx + \text{II. } 2dy$, vnde fit

$$\frac{2dxddx + 2dyddy}{2g d^2} = 2dx - \frac{2Tdz}{A}$$

quae aequatio integrata dat

$$\frac{dx^2 + dy^2}{2g d^2} = 2x - 2 \int \frac{Tdz}{A}.$$

Nunc vero haec combinatio: I. $x + \text{II. } y$ praebebat

$$\frac{x ddx + y ddy}{2g d^2} = x - \frac{T(a+z)}{A}.$$

Haec aequatio addatur ad priorem et prodibit

$$\frac{dx^2 + dy^2 + x dx + y dy}{2gdt^2} = 3x - 2 \int \frac{T dz}{A} - \frac{T}{A} (a + z),$$

vbi quidem partis ad sinistram integrale est $\frac{x dx + y dy}{2gdt^2}$;

at ex membro ad dextram nihil concludi posset. Pari modo non succederet haec combinatio: I. y — II. x , quae dat

$$\frac{y dx - x dy}{2gdt^2} = y, \text{ vbi etiam membri sinistri integrale est}$$

$\frac{y dx - x dy}{2gdt^2}$, sed iterum membrum alterum nullam reductionem patitur.

§. 7. Mirum autem non est, hunc motum, qualem in genere contemplamur, prorsus esse inextricabilem, quoniam ambo corpora A et B etiam inaequalia esse possent: hoc autem casu grauius inter oscillandum descenderet, lenius vero ascenderet, sicque motus prodiret nimis complicatus, quam vt per calculum determinari posset. Quamobrem necesse est nostram inuestigationem tantum ad corpora aequalia restringere, quia alioquin status aequilibrii locum habere non posset. Praeterea vero etiam necesse est diuagationes, seu angulos η et θ quam minimos assumere; vnde facile intelligitur, tensionem fili hoc casu ponderi cuiusque corporis fore aequalem, ita vt sit $T = A = B$. Denique patet, nisi corporibus initio motus verticalis fuerit, impressus, ambo corpora durante motu vix esse vel ascensura vel descensura, sicque etiam quantitas z quasi vt infinite parua tractari poterit.

§. 8. Ponamus igitur ambo corpora A et B inter se aequalia, ac primo quidem remoueamus vtrumque motum oscillatorium, ita vt sit $\eta = 0$ et $\theta = 0$, ac remane-

bunt

bunt tantum aequationes prima et tertia

$$\frac{d^2 z}{g dt^2} = 1 - \frac{T}{A};$$

$$\frac{d^2 z}{g dt^2} = \frac{T}{A} - 1;$$

quae inuicem additae dant $\frac{2 d^2 z}{g dt^2} = 0$, et a se inuicem subtractae relinquunt $0 = -\frac{2 T}{A} + 2$. Ex priorē ergo sequitur $\frac{dz}{dt} = \alpha$, ideoque $z = \alpha t$; vnde patet, corpus A motu vniiformi descendere celeritate $= \alpha$, alterum vero corpus B eadem celeritate ascendere. Ex posteriore vero fit $T = A$; tensio scilicet fili perpetuo erit eadem et aequalis ponderi vnius corporis.

§. 9. Nunc igitur tribuamus vtrique corpori quandam inclinationem η et θ , quasi infinite exiguam, et manifestum est, priorem motum inde non sensibilibiter turbari, ita vt adhuc sit $z = \alpha t$ et $T = A$, nisi quatenus ob motum minimum corporum tensio aliquantillum immutetur; vnde literam B in calculo retineamus. Quatuor ergo aequationes nostrae erunt:

$$\text{I} - \frac{(\alpha + \alpha t) d\eta^2}{g dt^2} = 1 - \frac{T}{A}; \quad \text{II} \frac{2 \alpha dt d\eta + (\alpha + \alpha t) d^2 \eta}{g dt^2} = -\eta$$

$$\text{III} \frac{(b - \alpha t) d\theta^2}{g dt^2} = \frac{T}{A} - 1; \quad \text{IV} \frac{2 \alpha dt d\theta - (b - \alpha t) d^2 \theta}{g dt^2} = \theta,$$

vbi ex secunda et quarta elici oportet ambos angulos η et θ . Prima vero ac tertia, quia inuoluunt quasi infinite-parua secundi ordinis, tantum inferuent correctionibus minimis, tam tensionis T quam quantitatis z , accuratius determinandis, quas igitur hic praetermittere licebit.

§. 10. Pro angulo igitur η inueniendo habemus hanc aequationem:

$$2 \alpha dt d\eta + (a + \alpha t) d d\eta + 2 g \eta dt^2 = 0,$$

quam quidem facile esset ad differentialia primi gradus reducere, quod autem nobis parum lucri esset allaturum. Ad ipsam aequationem autem commodius referendam ponamus $a = i\alpha$ et $\frac{2g}{\alpha} = n$, vt habeamus hanc aequationem:

$$2 d i d\eta + (i + t) d d\eta + n \eta dt^2 = 0,$$

pro cuius integrali inueniendo fingamus hanc seriem:

$$\eta = A + Bt + Ctt + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + \text{etc.}$$

eritque

$$\frac{d\eta}{dt} = B + 2Ct + 3Dtt + 4Et^3 + 5Ft^4 + \text{etc. et}$$

$$\frac{d d\eta}{dt^2} = 1.2C + 2.3Dt + 3.4Et^2 + 4.5Ft^3 + \text{etc.}$$

qui valores substituantur vt sequitur:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \frac{d d\eta}{dt^2} = 1.2C + 2.3Dt + 3.4Et^2 + 4.5Ft^3 + \text{etc.} \\ 2. \frac{d d\eta}{dt^2} = \quad + 1.2C + 2.3D + 3.4E + \text{etc.} \\ 3. \frac{d d\eta}{dt^2} = 2B + 4C + 6D + 8E + \text{etc.} \\ n\eta = nA + nB + nC + nD + \text{etc.} \end{array} \right\} = 0$$

vnde deducuntur hae determinationes:

$$C = \frac{-2B - nA}{1.2.3}; D = \frac{-5C - nB}{2.3.4}; E = \frac{-12D - nC}{3.4.5}; \text{etc.}$$

§. 11. Quia autem hic singuli coefficientes a binis praecedentibus pendent, huic incommodo medelam affereamus, ponendo $i + t = s$, vt habeamus hanc aequationem:

$$2 ds d\eta + s d d\eta + n \eta ds^2 = 0, \text{ et nunc ponamus } \eta = A + Bs + Css + Ds^3 + \text{etc.}$$

qua

qua serie substituta fiet

$$\left. \begin{aligned} \frac{s d d \eta}{d s^2} &= 1. 2 C s + 2. 3 D s s + 3. 4 E s^2 + 4. 5 F s^3 + \text{etc.} \\ \frac{s d \eta}{d s} &= 2 B + 4 C s + 6 D s s + 8 E s^2 + 10 F s^3 + \text{etc.} \\ n \eta &= n A + n B s + n C s s + n D s^2 + n E s^3 + \text{etc.} \end{aligned} \right\} = 0$$

Hinc fit

$$B = -\frac{n A}{2}; C = -\frac{n B}{6}; D = -\frac{n C}{12}; E = -\frac{n D}{20}; \text{etc.}$$

unde series assumta ita prodit expressa:

$$\eta = 1 - \frac{n s}{2} + \frac{n n s s}{2. 6} - \frac{n^3 s^3}{2. 6. 12} + \frac{n^4 s^4}{2. 6. 12. 20} - \text{etc.}$$

quae, quia nullo casu abrumpitur, nihil prodest, nisi forte quamdiu tempus, ideoque et s , est quantitas valde parua.

§. 12. Notatur etiam digna est transformatio istius aequationis, statuendo $\eta = \frac{y}{s}$; hinc enim erit

$$d' \eta = \frac{d y}{s} - \frac{y d s}{s s} \text{ et } d d \eta = \frac{d' d y}{s} - \frac{2 d y d s}{s s} + \frac{2 y d s^2}{s s^2}$$

qui valores substituti producent hanc aequationem:

$$d d y + \frac{n y d s^2}{s} = 0.$$

Quod si hic ponamus

$$y = e^{u d s}, \text{ ut fit } d y = u d s e^{u d s} \text{ et } d d y = (d u d s + u^2 d s^2) e^{u d s},$$

fietque $d u + u u d s + \frac{n d s}{s} = 0$, quae aequatio quia est formae Riccatianae, quam nullo adhuc modo tractare licuit, omnis opera in ea euoluenda frustra consumetur; ita ut determinationem huius motus oscillatorii, quo corpora A et B ciebuntur, dum filum super trochleas vniformiter promouetur, pro casu desperato declarare simus coacti.

§. 13. Interim tamen, quia longitudo filii M A continuo crescit, ita ut pendulum, corpus A sustinens, continuo crescat, evidens est, oscillationes continuo tardiores fieri debere; unde si pro tempore praesente quantitas s tanquam constans spectaretur, omisso primo termino, ut haberemus:

$$d^2y + \frac{n}{s} y ds^2 = 0, \text{ integrale foret}$$

$$y = \mathfrak{A} \sin. (\lambda + s \sqrt{\frac{n}{s}}) \text{ siue}$$

$$y s = \mathfrak{A} \sin. (\lambda + \sqrt{n} s) \text{ siue}$$

$$y = \frac{\mathfrak{A} \alpha}{\alpha + \alpha^2} \sin. (\lambda + \frac{\sqrt{2g(\alpha + \alpha^2)}}{\alpha});$$

quae expressio non multum videtur a scopo aberrare.

§. 14. Ut autem appareat, quantum ille valor $y = \mathfrak{A} \sin. (\lambda + s \sqrt{\frac{n}{s}}) = \mathfrak{A} \sin. (\lambda + \sqrt{n} s)$ a veritate discrepet, eum in aequatione differentiali $s d^2y + n y ds^2 = 0$ substituamus. Quia ergo est

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\mathfrak{A} \sqrt{n}}{2 \sqrt{s}} \cos. (\lambda + \sqrt{n} s) \text{ et}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{n \mathfrak{A}}{4 s} \sin. (\lambda + \sqrt{n} s) - \frac{n \mathfrak{A}}{4 s \sqrt{n} s} \cos. (\lambda + \sqrt{n} s)$$

habebimus hanc aequationem:

$$-\frac{n \mathfrak{A}}{4} \sin. (\lambda + \sqrt{n} s) - \frac{n \mathfrak{A}}{4 \sqrt{n} s} \cos. (\lambda + \sqrt{n} s) + n \mathfrak{A} \sin. (\lambda + \sqrt{n} s) = 0$$

siue

$$\frac{3n \mathfrak{A}}{4} \sin. (\lambda + \sqrt{n} s) - \frac{\mathfrak{A} \sqrt{n}}{4 \sqrt{s}} \cos. (\lambda + \sqrt{n} s) = 0$$

unde aberratio diiudicari debet.

§. 15. Quanquam igitur casus, quo $B = A$, facilis videbatur, tamen statim ac filum promouetur nihil plane

plane de motu corporum definire licet; quando autem filum quiescit, ita vt sit $\alpha = 0$, tum vtrumque corpus perinde oscillationes suas peraget, ac si firmiter esset suspensum. Tanto igitur minus erit sperandum, si corpora inter se inaequalia statuere velimus. Interim tamen occurrent certi quidam casus, quibus praeter omnem expectationem motum definire licebit, quos ergo vtique operae pretium erit accuratius euoluiffe.

§. 16. Primum igitur iterum faciamus $\eta = 0$ et $\theta = 0$, et aequationes nostrae erunt:

$$\text{I. } \frac{d^2 z}{g dt^2} = 1 - \frac{T}{A}.$$

$$\text{III. } \frac{d^2 z}{g dt^2} = \frac{T}{B} - 1; \text{ vnde fit } T = \frac{2AB}{A+B}, \text{ hincque}$$

$$\frac{d^2 z}{g dt^2} = \frac{A-B}{A+B} = \frac{1}{n}, \text{ vt fit } n = \frac{A+B}{A-B}.$$

Hinc iam erit

$$\frac{dz}{g dt} = \frac{t}{n}, \text{ ideoque } dz = \frac{g t dt}{n} \text{ et } z = \frac{g t^2}{2n},$$

vbi constantes non addimus, quia hinc multo magis quam supra in aequationes inextricabiles illaberemus; sic igitur affecti sumus has duas aequationes: $T = \frac{2AB}{A+B}$ et $z = \frac{g t^2}{2n}$, existente $n = \frac{A+B}{A-B}$, ita vt n sit numerus positivus, si $A > B$, contra vero negativus.

§. 17. Nunc etiam vtrique corpori minimas tribuamus inclinationes, a quibus cum praecedentes valores non immutari sint censendi, tantum secunda et quarta aequationum nostrarum in computum erunt ducendae, quae ob $dz = \frac{g t dt}{n}$ erunt:

$$\frac{g t dt d\eta + (a n + g t t) dd\eta}{2 g n dt^2} = -\eta \text{ et}$$

$$\frac{g t dt d\theta - (b n - g t t) dd\theta}{2 g n dt^2} = +\theta,$$

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. II.

T

quae

quae cum inter se sint similes, tractasse solam primam
sufficiet, quae quo commodior reddatur, faciamus $na = i'g$,
ut sit $i = \frac{n}{g}$, et aequatio resoluenda erit:

$$4it d i d \eta + (i + t t) d d \eta + 2 n \eta d i^2 = 0$$

quam etiam, ut supra, per series integrare tentemus.

§. 18. Fingamus igitur sequentem seriem:

$$\eta = A + Bt + Ctt + Dttt + Et^4 + Ft^5 + Gt^6 + \text{etc.} \text{ erit}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = B + 2Ct + 3Dtt + 4Et^3 + 5Ft^4 + 6Gt^5 + \text{etc.} \text{ et}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = 2C + 2 \cdot 3Dt + 3 \cdot 4Ett + 4 \cdot 5Ft^3 + 5 \cdot 6Gt^4 + \text{etc.}$$

quibus substitutis fiet

$$\frac{2it d i d \eta}{dt^2} = 2 \cdot 2iC + 2 \cdot 3iDtt + 3 \cdot 4iEttt + 4 \cdot 5iFt^4 + 5 \cdot 6iGt^5 + \text{etc.}$$

$$\frac{4t d d \eta}{dt^2} = 4B + 8C + 12D + 16E + \text{etc.}$$

$$\frac{2n\eta}{dt} = 2An + 2Bn + 2Cn + 2Dn + 2En + \text{etc.}$$

unde sequuntur sequentes denominationes:

$$C = -\frac{2An}{1 \cdot 2 \cdot 2}; D = -\frac{B(2n+4)}{2 \cdot 3 \cdot 2}; E = -\frac{C(2n+10)}{3 \cdot 4 \cdot 2};$$

$$F = -\frac{D(2n+18)}{4 \cdot 5 \cdot 2}; G = -\frac{E(2n+28)}{5 \cdot 6 \cdot 2}; H = -\frac{F(2n+40)}{6 \cdot 7 \cdot 2} \text{ etc.}$$

sicque bini primi coefficientes A et B manent indeterminati.

§. 19. Hinc igitur perspicitur, hanc seriem abrum-
pi sequentibus casibus: scil. $n = 0$; $n = -2$; $n = -5$;
 $n = -9$; $n = -14$; $n = -20$, hincque in genere si
 $n = -\frac{i(i+3)}{2}$; ubi quidem alternatim vel A vel B nihilo
aequale sumi debet; ita ut his casibus motum desideratum
assignare valeamus. Praecipuos igitur euoluamus:

I. Si

- I. Si $n = -2$ erit $\eta = Bt$
 II. Si $n = -5$ erit $\eta = A + \frac{10At}{1.2t}$;
 III. Si $n = -9$ erit $\eta = Bt + \frac{14Bt^3}{2.3t}$;
 IV. Si $n = -14$ erit $\eta = A + \frac{28At}{1.2t} + \frac{28.18A}{1.2.3.4t^3}$;
 V. Si $n = -20$ erit $\eta = Bt + \frac{36Bt^3}{2.3t} + \frac{36.2Bt^5}{1.2.3.4.5t^5}$;
 VI. Si $n = -27$ erit $\eta = A + \frac{54At}{1.2t} + \frac{54.44At^3}{1.2.3.4t^3} + \frac{54.44.26At^5}{1.2.3.4.5.6t^5}$;
 etc. etc. etc. etc.

§. 20. Evoluamus igitur casum $n = -2$, vnde pro nostris corporibus prodit $B = 3A$, ita vt corpus A sit ascensurum; tum igitur erit $\eta = Bt$, quod autem est integrale particulare, vnde ante omnia integrale completum inuestigari debet. Hunc in finem ponamus $\eta = tv$, ita vt sit $d\eta = t dv + v dt$ et $dd\eta = t ddv + 2 dt dv$, et prodibit

$$4tt dt dv + (i + tt)t ddv + 2(i + tt) dt dv = 0, \text{ siue}$$

$$(i + tt)t ddv + 2(i + 3tt) dt dv = 0, \text{ vnde fit}$$

$$ddv = -\frac{2(i + 3tt) dt dv}{t(i + tt)}, \text{ hinc}$$

$$\frac{ddv}{dv} = -\frac{2(i + 3tt) dt}{t(i + tt)} = -\frac{2dt}{t} - \frac{4t dt}{i + tt},$$

vnde fit integrando

$$l \frac{dv}{dt} = -2lt - 2l(i + tt) + lC, \text{ consequenter}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C}{t(i + tt)^2}, \text{ ideoque } dv = \frac{C dt}{t(i + tt)^2},$$

quae ita resolvitur:

$$dv = \frac{C dt}{i i t t} - \frac{C dt}{i(2 + i t)^2} - \frac{C dt}{i t(i + t t)}, \text{ vnde fit}$$

$$v = -\frac{C}{i i t} - \frac{C}{i} \int \frac{dt}{(i + t t)^2} - \frac{C}{i t} \int \frac{dt}{i + t t}.$$

§. 21. Erat autem $i = \frac{na}{g} = -\frac{2a}{g}$, ideoque i numerus negatiuus. Ponamus igitur $i = -cc$ et habebimus

$$v = -\frac{c}{c+t} + \frac{c}{cc} \int \frac{dt}{(1t-cc)^2} - \frac{c}{c^2} \int \frac{dt}{1t-cc}.$$

Ponamus porro $\int \frac{dt}{(1t-cc)^2} = \frac{\alpha t}{1t-cc} + \int \frac{\beta dt}{1t-cc}$, eritque differentiando et per dt diuidendo

$$\frac{1}{(1t-cc)^2} = \frac{\alpha}{1t-cc} - \frac{2\alpha t}{(1t-cc)^2} + \frac{\beta}{1t-cc},$$

vnde colligimus $\alpha = \beta = -\frac{1}{2cc}$, ita vt nunc sit

$$v = -\frac{c}{c+t} - \frac{ct}{2c^2(1t-cc)} - \frac{3c}{2c^2} \int \frac{dt}{1t-cc}.$$

Est vero

$$\int \frac{dt}{1t-cc} = -\int \frac{dt}{cc-1t} = -\frac{1}{2c} \log \frac{c+t}{c-t}$$

consequenter

$$v = -\frac{c}{c+t} - \frac{ct}{2c^2(cc-1t)} + \frac{3c}{4c^2} \log \frac{c+t}{c-t},$$

vel, posito breuitatis gratia $C = -Dc^2$, fiet

$$v = \frac{Dc}{t} + \frac{Dct}{2(cc-1t)} - \frac{3D}{4} \log \frac{c+t}{c-t} + E.$$

§. 23. Inuento hoc valore erit angulus noster

$$\eta = Dc + \frac{Dctt}{2(cc-1t)} - \frac{3}{4} Dt \log \frac{c+t}{c-t} + Et,$$

vbi notetur esse $cc = -i = +\frac{2a}{g}$. Posito igitur $t = 0$ fiet $\eta = Dc$; ficque Dc exprimit inclinationem initialem. Hinc crescente t hoc pendulum MA ascendet, et angulus etiam crescit, nisi forte constans D fuerit negatiua; verum tempus t non vltra c augeri potest, quia alioquin expressio pro η adeo in infinitum excresceret. Quod quoclarior apparet, consideremus etiam celeritatem angularem $\frac{d\eta}{dt} = \frac{Dct}{(cc-1t)^2} - \frac{3}{4} D \log \frac{c+t}{c-t} - \frac{3}{2} \frac{Dct}{cc-1t} + E$. Nunc igitur ponamus initio, quo $t = 0$, fuisse $\eta = \alpha$ et $\frac{d\eta}{dt} = 0$, erit-

eritque $\alpha = D c$ et $E = 0$, ideoque et $D = \frac{\alpha}{c}$, sicque erit

$$\eta = \alpha + \frac{\alpha t t}{2(cc - t t)} - \frac{3 \alpha t}{4 c} \sqrt{\frac{c+t}{c-t}} \text{ et}$$

$$\frac{d \eta}{d t} = \frac{\alpha c c t}{(cc - t t)^2} - \frac{3 \alpha}{4 c} \sqrt{\frac{c+t}{c-t}} - \frac{3 \alpha t}{2(cc - t t)}, \text{ siue}$$

$$\frac{d \eta}{d t} = \frac{\alpha t (3 t t - cc)}{2(cc - t t)^2} - \frac{3 \alpha}{4 c} \sqrt{\frac{c+t}{c-t}},$$

sicque hinc ad quoduis tempus t tam angulum η quam celeritatem angularem $\frac{d \eta}{d t}$ definire licet.

§. 24. Ex indole harum formularum perspicuum est, tempus t non ultra terminum C augeri posse, quippe quo tempore longitudo fili $MA = a + z$ ad nihilum redigitur, et tam angulus η , quam celeritas $\frac{d \eta}{d t}$ in infinitum excrescunt, quod quidem cum pendulo infinite breui facile conciliari potest. Verum iam multo ante, quam hoc euenit, angulus η tam fit magnus, vt non amplius pro tam paruo haberi possit, qualem natura nostri calculi supponit; sicque etiam istius motus determinatio mox erronea euadet. Quod autem ad oscillationes alterius corporis maioris B attinet, earum motus ob defectum Analysis nullo plane casu definire licet, quoniam omnes valores numeri n , quibus integratio succedit, sunt negatiui, ideoque tantum in pendulo ascendente locum habere possunt.